ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ε. ΝΙΚΟΛΙΔΑΚΗΣ - Ι. ΠΟΥΡΝΑΡΑΣ

Απειροστικός Λογισμός II

Δευτέρα 17-9-2018, 9-12 μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Α.Μ.:

1. Να εξετασθεί η σύγκλιση των σειρών: **i)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{5n}{3n^2-2}$, , **ii)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ **iii)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(logn)^2}{(log2)^n}$.

2. α) Να διατυπωθεί το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy για την σύγκλιση σειρών.
β) Να εξετασθεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ για $p>0$.

3. Να δοθεί ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας. Αποκλειστικά με χρήση του ορισμού να αποδείξετε ότι αν $f,g:D\to R$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις τότε και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Να εξετασθεί αν το γινόμενο fg είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση α) αν $D=[a,b]$, β) αν $D=[0,\infty)$, γ) αν $D=[0,\infty)$ και η f είναι φραγμένη.

4. Ας είναι $f:A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Να δοθεί ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας της f στο σύνολο A.

i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f:A:=(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 2, & x\in(1,2)\end{cases}$$

είναι συνεχής στο A αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

ii) Είναι ο περιορισμός της f στο σύνολο $(0,1)$ ομοιόμορφα συνεχής;

5. Αν για μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to R$ υπάρχει διαμέριση P τέτοια ώστε $U(f,P)=L(f,P)$, να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν, επιπλέον, $f(a)=1$ τότε $\int_a^b f(x)dx=b-a$.

6. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}3, & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}\\ 2, & x\in[a,b]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q}),\end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

7. Να υπολογιστούν δυο από τα τα ολοκληρώματα

$$(i)\int\frac{x^2+6}{x^3-3x^2+2x},\quad (ii)\int x^3e^{-x}dx,\quad (iii)\int cos^2(2x+3)dx.$$

8. Να εξετασθεί η σύγκλιση των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^p},\quad \int_0^2\frac{x^p dx}{\sqrt[4]{2^{p+1}-x^{p+1}}}$$

για τις διάφορες τιμές του $p>0$.

9. Ας είναι η συνάρτηση $h(x) = e^{3x}, x \geq 0$.

i) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor βαθμού $n \in \mathbb{N}$ της h στο σημείο $x_0 = 0$.

ii) Να γραφεί μια μορφή του υπολοίπου Taylor $R(f, n; x_0)(x), x \geq 0$ και να δειχθεί ότι

$$\lim_{n \to \infty} R(f, n; x_0)(x) = 0, x > 0.$$

iii) Να γραφεί η σειρά Taylor της f στο $x_0 = 0$.

10. Να εξετασθούν ως προς την σύγκλιση

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(2x-3)^k, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right).$$

11. Αν $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση να βρεθεί το πεδίο ορισμού και η παράγωγος της συνάρτησης F με τύπο

$$F(x) := \int_a^x f(xs)ds, \quad (a > 0).$$

ΝΑ ΔΟΘΟΥΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ 8 ΘΕΜΑΤΑ

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ